PErA

Mock Olimpiada Matemática Española

Sábado 2 y Domingo 3 de Marzo de 2024

Índice

1. Enunciados del primer día

Problema 1. Dado un número positivo n, Marc tiene n peras de pesos $1, 2, 3, \ldots, n$. Encuentra, en función de n, el mayor número k tal que Marc puede escoger k peras de tal manera que, de entre las peras (🍐) escogidas, no haya tres peras distintas con pesos a, b, c tales que $a + b = c$.

Por ejemplo, si $n = 4$, Marc podría escoger las tres peras $1, 2, 4$, pero no sería válido escoger las tres peras $1, 2, 3$, ya que $1 + 2 = 3$.

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo fijo. Decimos que un punto en el plano K es *pastanaga* (🥕) si existe un rectángulo $PQRS$ con centro K de tal manera que los puntos A, B, C y D estan, respectivamente, sobre los segmentos PQ, QR, RS y SP. Demuestra que existe una circunferencia ω que contiene todos los puntos pastanaga.

Problema 3. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales postivos (🍍) tales que $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$. Demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\text{mín}\{x_{i-1}, x_i\} \cdot \text{máx}\{x_i, x_{i+1}\}}{x_i} \leq 1,$$

donde denotamos $x_0 = x_n$ y $x_{n+1} = x_1$.

2. Enunciados del segundo día

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$, y sean E, F los pies de las alturas desde B i C a los lados AC y AB, respectivamente. Considera los puntos P y Q como las intersecciones de la recta EF con las rectas tangentes por B y C a la circunferencia circunscrita a ABC. Si M es el punto medio del segmento BC demuestra que la circunferencia circunscrita al triángulo PQM es tangente a BC en M.

Problema 5. Encuentra todas las funciones $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que la igualdad

$$f(xf(x) + y^2) = x^2 + yf(y)$$

se cumpla para cualquier par x, y de números reales positivos.

Problema 6. Sea n un entero positivo. Para cada entero positivo k, definimos a_k como el número resultante de añadir k zeros y un 1 a la derecha de la descomposición en base 10 de n. Determina si existe una k tal que a_k tenga almenos 4202^{1434} divisores primos distintos.

Nota: Por ejemplo, si $n = 172$ entonces $a_1 = 17201$, $a_2 = 172001$ i $a_3 = 1720001$.

Marc se ha comido toda la fruta (🍐,🥕,🍍) de un día al otro, así que en el segundo día no hay...

3. Solución problema 1

Problema 1. Dado un número positivo n, Marc tiene n peras de pesos $1, 2, 3, \ldots, n$. Encuentra, en función de n, el mayor número k tal que Marc puede escoger k peras de tal manera que, de entre las peras (🍐) escogidas, no haya tres peras distintas con pesos a, b, c tales que $a + b = c$.

Por ejemplo, si $n = 4$, Marc podría escoger las tres peras $1, 2, 4$, pero no sería válido escoger las tres peras $1, 2, 3$, ya que $1 + 2 = 3$.

Solución. Demostraremos que $k = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, o lo que es lo mismo, que si $n = 2m$ o $n = 2m + 1$ entonces $k = m + 1$. Recuerda que $\lceil x \rceil$ denota el techo o ceiling de x, es decir, el menor número entero mayor o igual que x.

Primero demostramos que efectivamente Marc puede escoger esta cantidad de peras tal que no haya dos que sumando sus pesos pesen igual que otra. Para eso si $n = 2m$ escoge las peras de pesos $m, m + 1, \ldots, 2m$, y si $n = 2m + 1$ escoge las de pesos $m + 1, m + 2, \ldots, 2m + 1$, que claramente cumplen las condiciones requeridas ya que cualesquiera dos pesos sumados resultan en algo más pesado que la pera que más pesa.

Demostraremos ahora que esto es óptimo. Sea a el peso de la pera más pesada elegida por marc, que claramente cumple $a \leq n$. Usaremos el principio del palomar, con el resto de pesos como palomas. Los palomares serán las parejas

$$(a - 1, 1),\ (a - 2, 2),\ (a - 3, 3), \ldots,\ (a - r, r)$$

donde $r = \lceil (a - 1)/2 \rceil$. Por ejemplo, si $a = 6$ estaríamos eligiendo los pares $(5, 1),\ (4, 2),\ (3, 3)$, y si $a = 7$ estaríamos eligiendo los pares $(6, 1),\ (5, 2),\ (4, 3)$. Si dos números distintos de la misma pareja están presentes, entonces su suma será k, dando lugar a una tripla $x, a - x, a$ que rompe la condición.

Por tanto, como mucho puede aparecer una pera de cada pareja. Esto también aplica si a es par y la pareja $(a/2, a/2)$ está presente, ya que los dos números que forman la pareja son el mismo. Por palomar, Marc ha podido elegir como mucho $r + 1$ peras: una por pareja, más la pera de peso a. Por tanto el número de peras elegidas por Marc es a lo sumo

$$r + 1 = \left\lceil \frac{a - 1}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{a + 1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n + 1}{2} \right\rceil,$$

tal como queríamos demostrar. $\square$

4. Solución problema 2

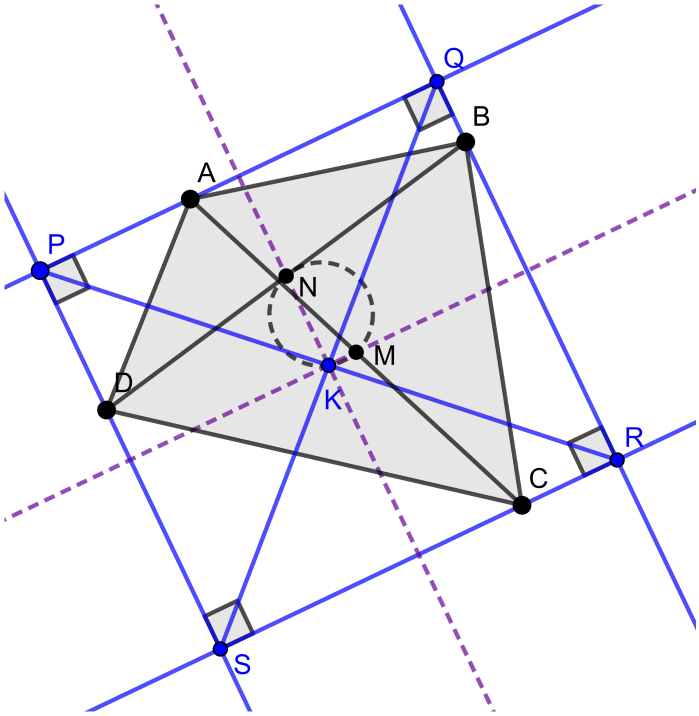
Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo fijo. Decimos que un punto en el plano K es *pastanaga* (🥕) si existe un rectángulo $PQRS$ com centro K de tal manera que los puntos A, B, C y D estan, respectivamente, sobre los segmentos PQ, QR, RS y SP. Demuestra que existe una circunferencia ω que contiene todos los puntos pastanaga.

Solución. Sean M y N los puntos medios de las diagonales AC y BC, respectivamente. Demostraremos que el lugar geométrico de los puntos pastanaga es la circunferencia de diámetro MN. Por tanto, basta con comprovar que si K es pastanaga entonces $\angle MKN = 90°$. La observación principal es la siguiente:

Claim. KM es paralela a los lados PQ y RS del rectángulo.

Demostración. Como M es el punto medio de AC, A está sobre PQ y C está sobre RS, entonces M está a la misma distáncia de ambas rectas PQ y RS. Como K es el centro del rectángulo $PQRS$, es trivial que K también está a la misma distáncia de PQ y RS. Por tanto, como PQ y RS son paralelas, sigue que KM también es paralela a ellas. □.

Análogamente se demuestra que KN es paralela a QR y SP. Por tanto, se obtiene que $\angle MKN = \angle PQR = 90°$ y hemos acabado.



5. Solución problema 3

Problema 3. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales postivos (🍍) tales que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\text{mín}\{x_{i-1}, x_i\} \cdot \text{máx}\{x_i, x_{i+1}\}}{x_i} \leq 1,$$

donde denotamos $x_0 = x_n$ y $x_{n+1} = x_1$.

Solución 1. Usaremos el siguiente resultado.

Claim. Sean a, b, c reales positivos tales que $a \leq c \leq b$. Entonces, se cumple que

$$\frac{ab}{c} \leq a + b - c$$

Demostración. Simplemente reordenamos

$$\frac{ab}{c} \leq a + b - c \iff ab \leq ac + bc - c^2 \iff c^2 - (a+b)c + ab \leq 0,$$

y esta última desigualdad es cierta, ya que podemos factorizar

$$c^2 - (a+b)c + ab = (c-a)(c-b)$$

y esto es menor o igual a zero ya que $c - b \leq 0 \leq c - a$. □

Ahora, como $\text{mín}\{x_{i-1}, x_i\} \leq x_i \leq \text{máx}\{x_i, x_{i+1}\}$, usando el claim y reordenando se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\text{mín}\{x_{i-1}, x_i\}\, \text{máx}\{x_i, x_{i+1}\}}{x_i} &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\text{mín}\{x_{i-1}, x_i\} + \text{máx}\{x_i, x_{i+1}\} - x_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\text{máx}\{x_i, x_{i+1}\} + \text{mín}\{x_i, x_{i+1}\}\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.
\end{aligned}$$

tal como queríamos demostrar. □

Solución 2 (esbozo). El problema también se puede resolver via la técnica del *smoothing*, que consiste en observar como varia la desigualdad en desplazar una de las variables. Definimos

$$M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\min\{x_{i-1}, x_i\} \cdot \max\{x_i, x_{i+1}\}}{x_i} \overset{?}{\leq} 1.$$

Es obvio que si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, entonces se da la igualdad. Supongamos, por tanto, que existen índices i, j tales que

$$x_{i-1} < x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_j > x_{j+1},$$

posiblemente ciclando al rededor de n si $i > j$.

Claim. El valor de M no disminuirá si reasignamos

$$x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_j \coloneqq \max\{x_{i-1}, x_{k+1}\}.$$

Es un ejercicio sencillo comprovar que esto es realmente cierto. Con esta idea en mente, podemos definir el siguiente proceso: mientras las variables x_k no sean todas iguales, seleccionamos las dos i, j descritas arriba, y intercambiamos

$$x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_j \coloneqq \max\{x_{i-1}, x_{k+1}\}.$$

tal como indicava el claim. Está claro que el proceso solo terminará si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, y que entonces tendremos la igualdad. Como el proceso solo incrementa M, el resultado queda demostrado, ya que el valor inicial a la fuerza deberá ser menor o igual que 1. No obstante, hay que comprovar que realmente este proceso acaba. Afortunadamente, esto es sencillo considerando la monovariante creciente

$$N \coloneqq \left|\left\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid x_i = x_{i+1}\right\}\right|.$$

Está claro que inicialmente $N \geq 0$, y que el proceso acaba cuando $N = n$. Finalmente, es trivial comprovar que en cada iteración del proceso, N incrementa por almenos 1. Por tanto, el proceso acabará.

Comentarios. Este problema es difícil de atacar por métodos estándar debido a sus casos de igualdad: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ no es el único caso de igualdad, ya que hay infinitos. Analizando cuidadosamente la solución 1, se puede demostrar que se da la igualdad si y solo si no existe ninguna i tal que $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$. Así que, por ejemplo, si $n = 4$ una elección inocente de las variables como

$$x_1 = 0{,}1,\ \ x_2 = 0{,}3,\ \ x_3 = 0{,}25,\ \ x_4 = 0{,}35$$

da la igualdad.

6. Solución problema 4

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$, y E, F los pies de las alturas desde B i C a los lados AC y AB, respectivamente. Considera los puntos P y Q como las intersecciones de la recta EF con las rectas tangentes a las circunferencia circunferencia (ABC) por B y C. Si M es el punto medio del segmento BC demuestra que la circunferencia circunscrita del triángulo PQM es tangente a BC en M.

Solución. Durante la solución llamaremos $\beta = \angle CBA$ y $\gamma = \angle ACB$.

Empezamos demostrando que los triángulos $\triangle BPF$ y $\triangle CQE$ son isósceles. Esto se debe a que, por la condición de tangencia, $\angle FBP = \angle ABP = \gamma$. A su vez, como $BFEC$ es un cuadrilátero cíclico también obtenemos que $\angle PFB = \gamma$. Similarmente se obtiene que $\angle CEQ = \angle QCE = \beta$.

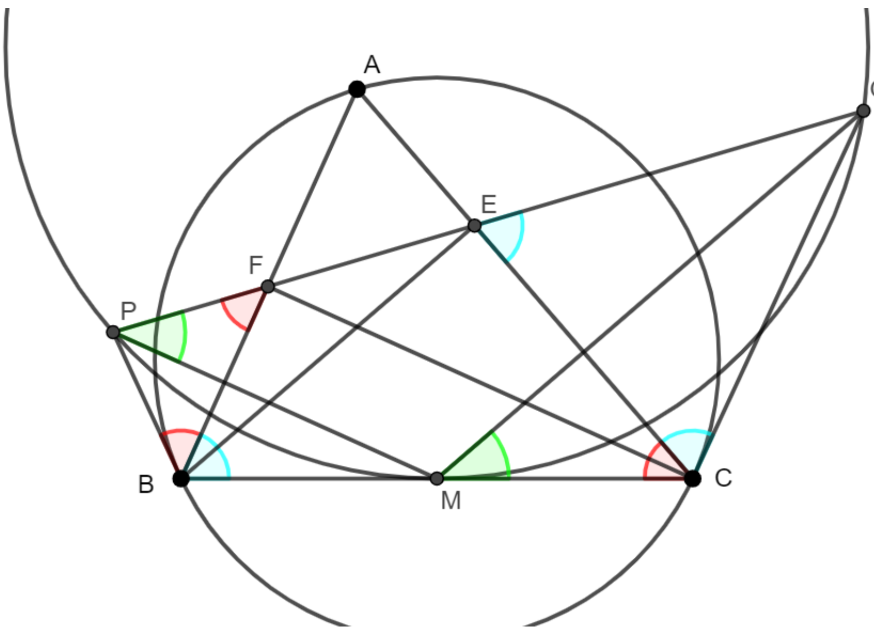
Ahora notamos que los isósceles vistos nos implican que P está en la mediatriz de BF y que Q está en la mediatriz de EC. Pero a su vez, al ser M el centro del cuadriátero $BFEC$, M está en las mediatrices de BF y EC. Es así que obtenemos las igualdades de ángulos

$$\angle CMQ = \frac{1}{2}\angle CME = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\gamma) = 90^\circ - \gamma,$$

y a su vez

$$\angle MPQ = \frac{1}{2}\angle BPF = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\gamma) = 90^\circ - \gamma,$$

lo que implica la tangencia deseada y por lo tanto acaba el problema.



7. Solución problema 5

Problema 5. Encuentra todas las funciones $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que la igualdad

$$f(xf(x) + y^2) = x^2 + yf(y)$$

se cumpla para cualquier par x, y de números reales positivos.

Solución. La única solución es $f(x) = x$, que claramente funciona. Seguidamente demostraremos que es la única. Primero de todo, observa que

$$x^2 + yf(y) = f(xf(x) + y^2) = f(f(x^2 + yf(y))).$$

Por tanto, todos los reales positivos de la forma $x^2 + yf(y)$ son puntos fijos de $f(f(x))$. Además, como x^2 se puede mover libremente sobre los reales positivos, obtenemos que cualquier número real positivo suficientemente grande es de la forma $x^2 + yf(y)$. Por tanto, existe una A (por ejemplo, $A = 2f(2) + 1$) tal que $f(f(x)) = x$ para todo $x \geq A$.
Para una de estas x, observamos que substituyendo x, y primero y $f(x), y$ después, obtenemos

$$x^2 + yf(y) = f(xf(x) + y^2) = f(f(x)f(f(x)) + y^2) = f(x)^2 + y^2$$

y por tanto $x^2 = f(x)^2$, dando que $x = f(x)$ para toda $x \geq A$. Clarament, como $f(x) \in \mathbb{R}^+$, es decir, que es positivo, se obtiene que $f(x) = x$ para todo $x \geq A$.

Para acabar, si substituimos una $y \geq \text{máx}\{A, \sqrt{A}\}$ en la equación original, obtenemos

$$xf(x) + y^2 = f(xf(x) + y^2) = x^2 + yf(y) = x^2 + y^2,$$

ya que $y \geq A$ y $xf(x) + y^2 \geq y^2 \geq A$. Por tanto, para cualquier x obtenemos que $xf(x) = x^2$, implicando que $f(x) = x$ para toda x real positiva. □

8. Solución problema 6

Problema 6. Para cada entero positivo k, definimos a_k como el número resultante de añadir k zeros y un 1 a la derecha de 2024, todo escrito con cifras en base diez. Determina si existe una k tal que a_k tenga almenos 2024^{2024} divisores primos distintos.

Nota: Por ejemplo, $a_1 = 202401$, $a_2 = 2024001$ i $a_3 = 20240001$.

Solución. Ponemos $n = 2024$. Primero nota que claramente $a_k = n \cdot 10^{k+1} + 1$. Demostraremos que para todo l entero existe k de tal manera que a_k tiene por lo menos l divisores primos distintos. Para esto procederemos por inducción, donde el caso base $l = 1$ es obvio.

Asumamos ahora que el resultado es cierto para l. Esto significa que existe k tal que a_k tiene almenos l primos distintos. Si este tiene estricatamente mayor a l primos ya hemos acabado, así que asumamos que tiene exactamente l. Escribimos entonces $a_k = n \cdot 10^{k+1} + 1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$.

Ahora, esto implica que, mirando módulo $p_i^{\alpha_i+1}$ se tiene que $a_k \neq 0 \pmod{p_i^{\alpha_i+1}}$. Como notamos que claramente ninguno de los $p_i's$ es o 2 o 5, pues a_k es coprimo con 10, tenemos que si cambiamos k por él mismo sumado a un múltiplo de $\varphi(p_i^{\alpha_i+1})$, se da la relación

$$10^{k+1+r\varphi(p_i^{\alpha_i+1})} \equiv 10^{k+1} \pmod{p_i^{\alpha_i+1}},$$

lo que a su vez implica que

$$10^{k+1+r\varphi(p_i^{\alpha_i+1})} \equiv 10^{k+1} \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

Es así que a_k y $a_{k+r\varphi(p_i^{\alpha_i+1})}$ son ambos múltiplos de $p_i^{\alpha_i}$ pero no de $p_i^{\alpha_i+1}$.

De esta manera, si llamamos $M = \prod_{i=1}^{l} \varphi(p_i^{\alpha_i+1})$, entonces todo primo de a_k aparece con la misma multiplicidad en a_{k+M}, pero como $a_{k+M} > a_k$, se debe tener que a_{k+M} tiene almenos un factor primo distinto más que a_k, lo que acaba el problema.